



Задание 1. Разминка

Задача 1.1 Тонущий стержень

В процессе погружения на стержень действуют следующие силы:

А) Сила тяжести, приложенная к центру масс стержня (т.к. стержень однородный то к его середине), направленная вертикально вниз, равна

$$F_0 = mg = \rho_0 S l g \quad (1)$$

S - площадь поперечного сечения стержня.

Б) Сила Архимеда, приложенная к центру масс вытесненной жидкости (к середине погруженной части стержня, имеющей длину z), направленная вертикально вверх, равна

$$F_A = \rho S z g. \quad (2)$$

В) Искомая сила натяжения нити F приложена к верхнему концу стержня и направлена вертикально вверх.

Г) Если стержень касается дна, то в точке касания (нижний конец стержня) действует сила нормальной реакции дна $\vec{N}$, направленная вертикально вверх.

Так как стержень погружают медленно, то можно считать, что в любой момент времени стержень находится в равновесии, т.е. сумма сил, действующих на стержень, и сумма моментов этих сил равны нулю.

Рассмотрим теперь различные варианты погружения стержня.

1. Стержень расположен вертикально и не касается дна.

В этом случае условие равновесия стержня имеет вид

$$F = mg - F_A \quad (3)$$

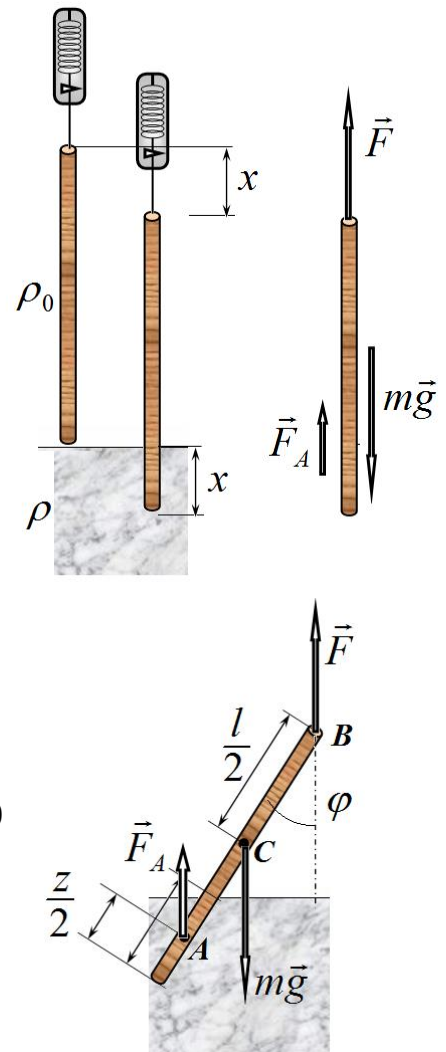
Глубина погруженной части стержня $z = x$. Подставляя выражения для сил, получим формулы для силы натяжения нити (которая совпадает с показаниями динамометра

$$\begin{aligned} F = mg - F_A &= \rho_0 S l g - \rho S x g = \rho_0 S l g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{x}{l} \right) = \\ &= F_0 \left(1 - \eta \frac{x}{l} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

2. Стержень располагается под некоторым углом φ к вертикали и не касается дна. Запишем выражение для суммы моментов сил тяжести и Архимеда относительно верхнего конца стержня (см. рис.)

$$\begin{aligned} M &= -mg \frac{l}{2} \sin \varphi + F_A \left(l - \frac{z}{2} \right) \sin \varphi = \\ &= -\rho_0 S l g \frac{l}{2} \sin \varphi + \rho S z g \left(l - \frac{z}{2} \right) \sin \varphi = \\ &= -F_0 \frac{l}{2} \sin \varphi \left(1 - \eta \frac{z}{l} \left(2 - \frac{z}{l} \right) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Из этой формулы следует, что положение равновесия может осуществляться в двух случаях: когда $\varphi = 0$ (стержень расположен вертикально); и при



Теоретический тур. Решения задач.



$$1 - \eta \frac{z}{l} \left(2 - \frac{z}{l} \right) = 0 \quad (6)$$

Это уравнение имеет действительные корни

$$u = \frac{z}{l} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\eta}} \quad (7)$$

Только при $\eta = \frac{\rho}{\rho_0} \geq 1$, т.е. если плотность жидкости больше плотности стержня, и стержень

может плавать в жидкости. Большой корень этого уравнения больше 1, поэтому может быть отброшен. Поэтому единственным корнем, имеющим физический смысл, является

$$u_0 = \frac{z}{l} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\eta}} \quad (7)$$

Чтобы определить, в каких случаях вертикальное положение стержня будет соответствовать положению устойчивого равновесия, еще раз обратимся к выражению для моментов сил (5). Будем считать, что стержень погружен на глубину x и отклонился от вертикального положения на малый угол. В этом случае длина погруженной части примерно равна $z = x$. Вертикальное положение будет устойчивым, если $M \leq 0$. Это условие выполняется, если глубина погружения стержня удовлетворяет условию (это легко показать, анализируя выражение в скобках в формуле (5)):

$$x < u_0 l \quad (8)$$

При $x > u_0 l$ положение вертикальное становится неустойчивым и стержень отклоняется от вертикали, на некоторый угол, зависящий от величины x . Поэтому в этом случае условие равновесия определяется уравнением (6). Важно отметить, что решение этого уравнения не зависит от x : следовательно, длина погруженной части стержня остается постоянной и определяется формулой (7)

$$z = u_0 l. \quad (9)$$

Поэтому остается постоянной и сила Архимеда, и сила натяжения нити, и показания динамометра

$$F = mg - F_A = \rho_0 S l g - \rho S z g = \rho_0 S l g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{z}{l} \right) = F_0 (1 - \eta u_0) \quad (10)$$

3. Нижний конец стержня касается дна, верхний конец стержня располагается над поверхностью жидкости.

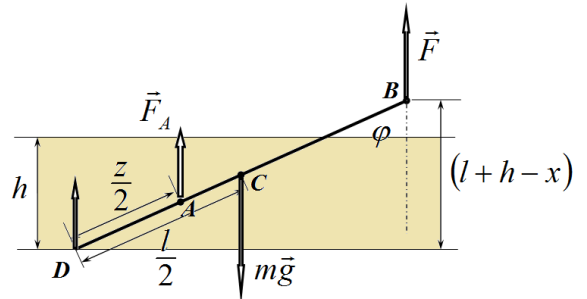
В этом случае глубина погружения стержня однозначно определяется величиной x .

С помощью рисунка легко найти

$$z = \frac{h}{\cos \varphi}, \quad \cos \varphi = \frac{l + h - x}{l}. \quad (11)$$

Откуда следует, что

$$z = \frac{lh}{l + h - x}. \quad (12)$$



Для определения силы натяжения нити запишем условия равновесия моментов сил относительно нижней точки стержня D , расположенной на дне ванны



$$F_A \frac{z}{2} \sin \varphi - mg \frac{l}{2} \sin \varphi + Fl \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{2} mg - \frac{1}{2} F_A \frac{z}{l} = \frac{1}{2} \rho_0 S l g - \frac{1}{2} \rho S z \frac{z}{l} = \frac{1}{2} F_0 \left(1 - \eta \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right). \quad (13)$$

4. Стержень касается дна и полностью погружен в воду.

В этом случае длина погруженной части $z = l$, поэтому из формулы (14) следует, что

$$F = \frac{1}{2} F_0 (1 - \eta) \quad (13)$$

Очевидно, что последних варианта реализуются при $\eta < 1$, когда стержень тонет.

Полученные формулы позволяют построить требуемые графики.

А) Легкий стержень ($\eta = \frac{\rho}{\rho_0} = 2$) сначала погружается вертикально, сила натяжения нити

изменяется в соответствии с формулой (4):

$$\frac{F}{F_0} = 1 - 2 \frac{x}{l} \quad (14)$$

До тех пор, пока вертикальное положение не потеряет устойчивость. Это произойдет при

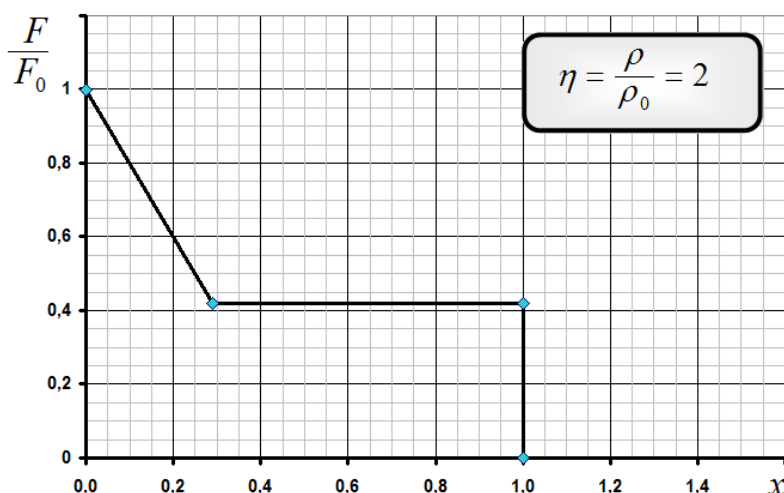
$$u_0 = \frac{x_0}{l} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \approx 0,29 \Rightarrow$$

$$x_0 = 0,29 l$$

Заметим, что стержень дна не достигает.

Далее сила натяжения нити будет оставаться постоянной и равной:

$$F = F_0 (1 - \eta u_0) \Rightarrow \frac{F}{F_0} = 0,41. \quad (15)$$



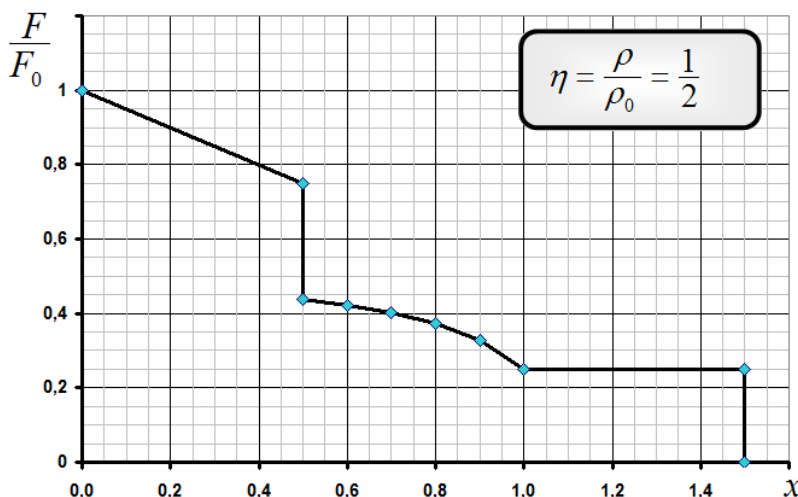
Наконец, при $x = l$ стержень расположится горизонтально на поверхности жидкости при этом сила натяжения нити станет равной нулю.

Строго говоря, переход к нулевому значению произойдет не скачком, а плавно. Но чтобы описать этот плавный переход необходимо учесть поперечные размеры стержня, что выходит за рамки данной задачи.

Б) Тяжелый стержень ($\eta = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2}$)

погружается вертикально до тех пор, пока его нижний конец не достигнет дна, что произойдет при $x = h$. Изменение силы натяжения на этом участке описывается формулой

$$\frac{F}{F_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x}{l}$$



Теоретический тур. Решения задач.

При этом значении $x = h = \frac{l}{2}$ сила натяжения нити может принимать значения от максимальной величины $F_{\max} = \frac{3}{4}F_0$ до минимальной величины, при которой вертикальное положение стержня становится неустойчивым: $F_{\min} = \frac{7}{16}F_0$. При этом значении силы натяжения нити со стороны дна на стержень действует сила $\frac{5}{16}F_0$.

Далее стержень будет постепенно наклоняться, и его верхний конец будет находиться над поверхностью воды вплоть до того момента, когда $x = l$. На этом этапе сила натяжения описывается формулами (12)-(13):

$$F = \frac{1}{2}F_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l+h-x} \right)^2 \right).$$

При $x \geq l$ верхний конец стержня окажется под водой, при этом $F = \frac{1}{4}F_0$. Наконец, при $x = l + h$ стержень ляжет на дно, и сила натяжения нити станет равной нулю.



Задача 1.2 Жук на шнуре

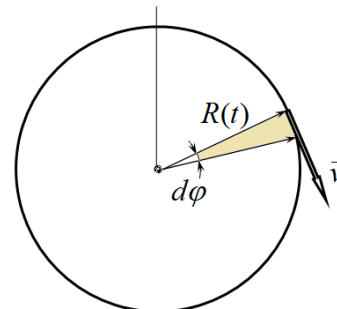
Представим движение жука, как движение по окружности, радиус которой увеличивается со временем.

Длина окружности (равная длине шнура) увеличивается со временем по закону

$$L = l_0 + Vt. \quad (1)$$

Следовательно, ее радиус изменяется как

$$R(t) = \frac{L}{2\pi} = \frac{l_0 + Vt}{2\pi}. \quad (2)$$



За малый промежуток времени dt жук проползает расстояние vdt , или поворачивается на угол

$$d\varphi = \frac{2\pi v dt}{l_0 + Vt} \quad (3)$$

Интегрируя полученное выражение, получим зависимость угла поворота жука от времени

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{2\pi v dt}{l_0 + Vt} = 2\pi v \int_0^t \frac{dt}{l_0 + Vt} = 2\pi \frac{v}{V} \ln \frac{l_0 + Vt}{l_0}. \quad (4)$$

Когда жук проползет половину шнура, угол поворота станет равным $\varphi = \pi$, а когда доползет до конца шнура $\varphi = 2\pi$.

При решении задачи можно обойтись и без искусственного, но наглядного «свертывания» жгута в окружность. Для этого можно поступать и более формально.

Вариант 1.

Пусть положение жука определяется координатой x - его расстоянием до неподвижной стенки. Тогда для этой координаты справедливо уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = V \frac{x}{l_0 + Vt} + v \quad (5)$$

Не сложно решить и этой уравнение, а затем координату жука приравнять к изменяющейся длине шнура.

Вариант 2. Пусть $\xi = \frac{x}{l_0 + Vt}$ - доля длины шнура, которую прополз жук. Тогда для этой величины справедливо уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{v}{l_0 + Vt} \quad (6)$$

Это уравнение следует, как из простых логических рассуждений, так и как следствие уравнения (5). Заметим, что оно полностью эквивалентно уравнению (3).

Решение этого уравнения

$$\xi = \frac{v}{V} \ln \frac{l_0 + Vt}{l_0}. \quad (3)$$

Откуда следуют искомые времена:

До середины шнура

$$\tau_{0,5} = \frac{l_0}{V} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{V}{v}\right) \approx 9,2 \cdot 10^{17} \text{ лет}$$

До конца шнура

$$\tau_{0,5} = \frac{l_0}{V} \exp\left(\frac{V}{v}\right) \approx 8,5 \cdot 10^{35} \text{ лет}.$$

Теоретический тур. Решения задач.

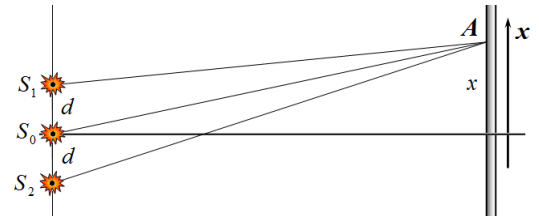


Задача 1.3. Модернизированная схема Юнга

Пусть центральная щель S_0 создает в точке A на экране, находящейся на расстоянии x от оси симметрии колебание, описываемое функцией

$$E_0 = A \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (1)$$

Величину E_0 можно рассматривать как напряженность электрического поля световой волны. Тогда колебания, создаваемые боковыми щелями в этой же точке, описываются функциями



$$E_{1,2} = A \cos(\omega t - \varphi_0 \pm \Delta\varphi). \quad (2)$$

Величина $\Delta\varphi$ является дополнительным сдвигом фазы вследствие смещения щелей на расстояние d . Как известно, этот сдвиг фазы пропорционален координате x точки A на экране

$$\Delta\varphi = ax, \quad (3)$$

где a - постоянная величина, зависящая от длины волны, расстояния между щелями и расстояния между пластиной и экраном. Точное выражение для этой константы не требуется для решения задачи.

1.3.1 При наличии только двух щелей результирующее колебание описывается функцией

$$E = A \cos(\omega t - \varphi_0 - \Delta\varphi) + A \cos(\omega t - \varphi_0 + \Delta\varphi) = 2A \cos(\omega t - \varphi_0) \cdot \cos(\Delta\varphi) \quad (4)$$

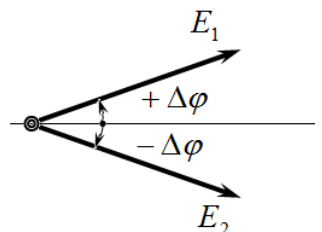
Интенсивность света пропорциональна среднему по времени квадрату напряженности поля. При наличии только двух щелей эта интенсивность будет равна

$$I_{(2)} = \langle (2A \cos(\omega t - \varphi_0) \cdot \cos(\Delta\varphi))^2 \rangle = 2A^2 \cos^2(\Delta\varphi) = 4I_{(1)} \cos^2(\Delta\varphi) \quad (5)$$

где $I_{(1)}$ - интенсивность света, создаваемая одним источником.

Этот же результат можно получить, суммируя колебания по методу векторных диаграмм. Диаграмма колебаний показана на рисунке, из которого следует, что амплитуда результирующего колебания равна

$$A_{(2)} = 2A \cos \Delta\varphi \quad (6)$$



Тогда интенсивность света, пропорциональная квадрату амплитуды оказывается равной

$$I_{(2)} = 4I_{(1)} \cos^2 \Delta\varphi = 4I_{(1)} \cos^2 ax. \quad (7)$$

Постоянную a не сложно определить из приведенного графика. Ее удобно записать в виде

$$a = \frac{\pi}{\delta}, \quad (8)$$

Теоретический тур. Решения задач.

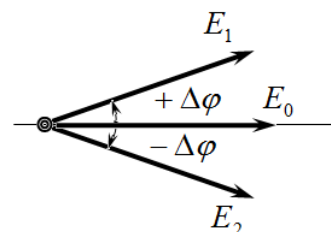


где $\delta = 2,0 \text{ мм}$ - ширина интерференционной полосы на экране. Величина $I_{(1)}$ равна 1.

1.3.2 При наличии трех щелей необходимо просуммировать три колебания, создаваемых тремя щелями. Векторная диаграмма этих колебаний показана на следующем рисунке. В этом случае амплитуда суммарного колебания равна

$$A_{(3)} = 2A \cos \Delta\varphi + A.$$

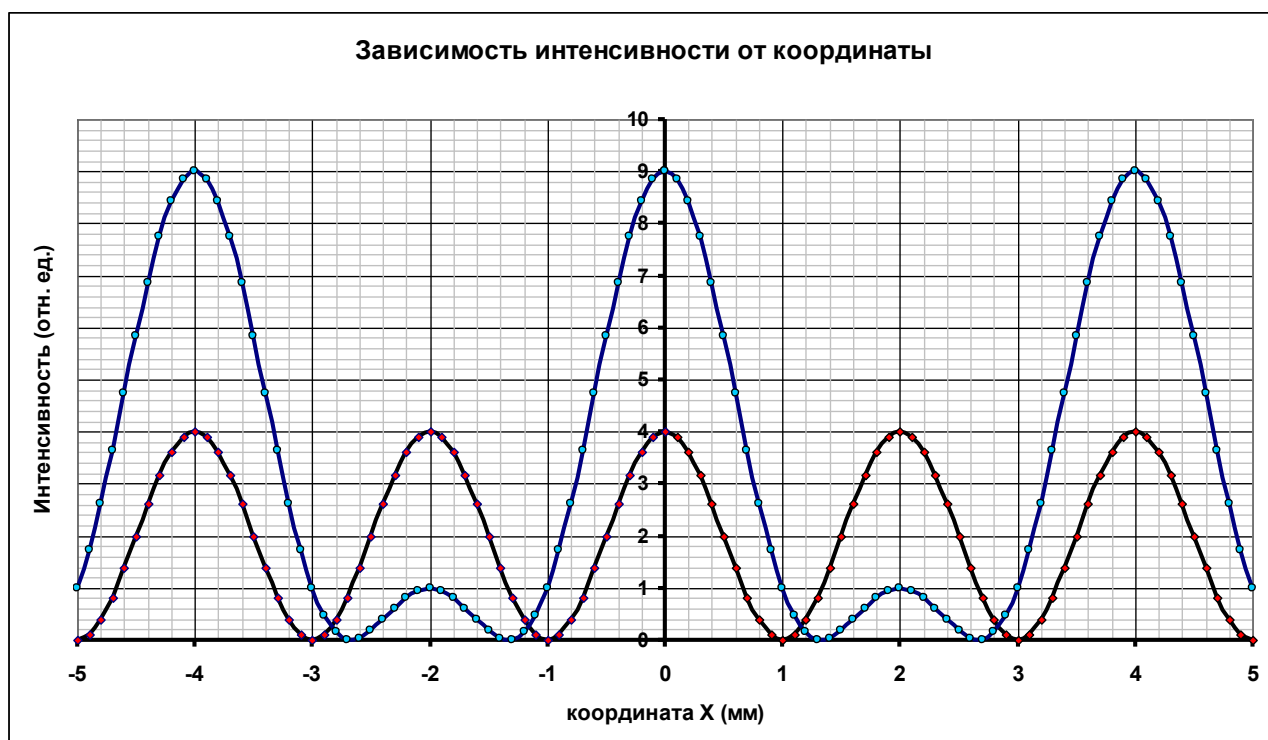
(9)



Соответственно, интенсивность света описывается функцией

$$I_{(2)} = (2A \cos \Delta\varphi + A)^2 = I_{(1)}(1 + 2 \cos ax)^2 \quad (10)$$

Значение параметров этой функции такие же, как и в предыдущем случае: $I_{(1)} = 1$, $a = \frac{\pi}{\delta}$, $\delta = 2,0 \text{ мм}$. График этой функции не сложно построить «по точкам». Результат построения показан на рисунке



Задание 2. Физика попкорна

Часть 1. Критическое давление разрыва

1.1 Так как процесс расширения газов после разрыва оболочки происходит очень быстро, то этот процесс можно считать адиабатным. Используем уравнение адиабатного процесса

$$P_{cr} V_0^\gamma = P_0 V_1^\gamma \quad (1)$$

Расширение происходит от начального объема зерна V_0 (при давлении равном критическому давлению разрыва P_{cr}) до объема образовавшихся хлопьев V_1 (при давлении равном атмосферному). Учтем, что объемы частиц пропорциональны кубу их радиуса, поэтому искомое критическое давление определяется по формуле

$$P_{cr} = P_0 \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^\gamma = P_0 \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{3\gamma} \approx 19 \text{ атм} = 19 \cdot 10^5 \text{ Па} . \quad (2)$$

1.2 Можно пренебречь изменением массы зерна (т.е. массой испарившейся влаги). Тогда отношение объемов равно обратному отношению плотностей, поэтому

$$P_{cr} = P_0 \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^\gamma = P_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^\gamma \approx 16 \text{ атм} = 16 \cdot 10^5 \text{ Па} . \quad (3)$$

1.3 Чтобы связать максимальное давление внутри зерна m максимальным механическим напряжением, которая выдерживает оболочка, можно воспользоваться формулой Лапласа для избыточного давления. Аналогом коэффициента поверхностного натяжения (силы, приходящейся на единицу длины) является произведение максимальной прочности на толщину оболочки $\sigma_c h$. Согласно формуле Лапласа разность давлений внутри и снаружи оболочки равна

$$\Delta P = P_{cr} - P_0 = \frac{2\sigma_c h}{r_0} . \quad (4)$$

Из этой формулы следует, что критическое давление оценивается по формуле

$$P_{cr} = \frac{2\sigma_c h}{r_0} + P_0 \approx 11 \cdot 10^5 \text{ Па} = 11 \text{ атм} . \quad (5)$$

1.4 Из трех полученных результатов предпочтительнее выбрать последние (5), так как в предыдущих расчетах используются плохо определяемые параметры зерен и хлопьев – средние радиусы и плотности зерен до и после нагревания.

Часть 2. Температура разрыва.

2.1 Процесс нагревания зерен можно считать изохорным, так как оболочка зерна достаточно прочная и малорастяжимая. Для этого процесса этот процесс описывается уравнением

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{P_{cr}}{T_{cr}} . \quad (6)$$

Из которого находим температуру, до которой следует нагреть сухой воздух внутри зерна

$$T_{cr} = T_0 \frac{P_{cr}}{P_0} = 293 \text{ К} \frac{11}{1} = 3200 \text{ К} \approx 3000^\circ \text{С} . \quad (7)$$



Абсурдность полученного результата говорит о том, что без учета испарения воды объяснить наблюдаемый эффект невозможно.

2.2 При нагревании зерна содержащаяся влага испаряется, при этом водяной пар является насыщенным. Зерно разорвется, когда давление насыщенных водяных паров достигнет значения ΔP , определяемого по формуле (4). Отметим, что при этом мы пренебрегаем давлением водяных паров при комнатной температуре и изменением давления сухого воздуха при нагревании. Эти приближения допустимы в пределах той точности, которая определяется исходными данными.

Их формулы, приведенной в условии задачи, определим температуру, при которой давление насыщенных водяных паров станет равным $\Delta P \approx 10 \text{ атм}$:

$$T_{cr} = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{ML} \ln \frac{P_s}{P_0}} = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{ML} \ln \frac{\Delta P}{P_0}} = 450 \text{ K} . \quad (8)$$

Или $t_{cr} \approx 180^\circ\text{C}$ - вполне реальная и разумная оценка!

2.3 При комнатной температуре давление насыщенного водяного пара значительно меньше нормального атмосферного давления, поэтому можно пренебречь массой этих паров, т.е. считать, что вся вода находится в жидком состоянии. Также можно считать, что водяные пары подчиняются уравнению состояния Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M} RT , \quad (9)$$

где $P = \Delta P \approx 10 \text{ атм}$ - парциальное давление водяных паров в момент разрыва зерна, произошедшего при температуре $T_{cr} \approx 450 \text{ K}$. Из уравнения (9) находим массу испарившейся воды

$$m = \frac{M \Delta P V}{RT_{cr}} = \frac{M \Delta P \frac{4}{3} \pi r_0^3}{RT_{cr}} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 10 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \frac{4}{3} \pi (3,1 \cdot 10^{-3} \text{ м})^3}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 450 \text{ K}} \approx$$

$$\approx 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ кг} = 0,60 \text{ мг}$$
(10)

Часть 3. Суперпопкорн

3.1 При пониженном внешнем давлении P_1 , уравнение адиабатного процесса будет иметь вид

$$P_{cr} V_0^\gamma = P_1 (2V_1)^\gamma \quad (11)$$

Используя уравнение (1), получим

$$P_0 V_1^\gamma = P_1 (2V_1)^\gamma \Rightarrow P_1 = P_0 \cdot 2^{-\gamma} \approx 0,40 \text{ атм} \quad (12)$$

Т.е. внешнее давление следует уменьшить в 2,5 раза по сравнению с атмосферным.

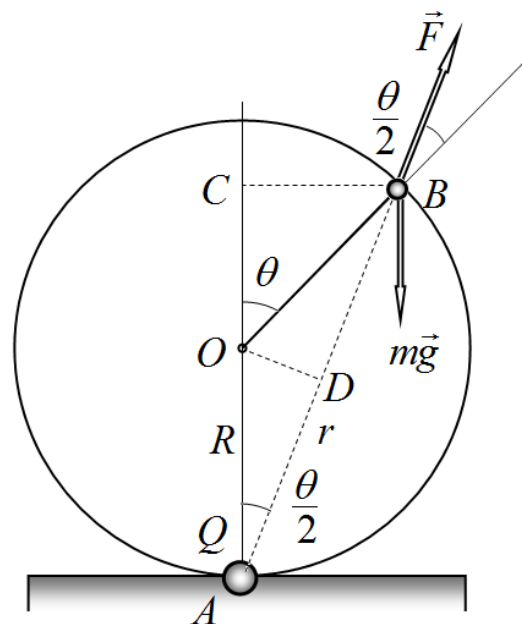


Задание 3. Внутри сферы

Часть 1. Общие характеристики

1.1 Шарик обладает :гравитационной энергией (в поле тяжести земли) и энергией кулоновского взаимодействия (см. рис.):

$$\begin{aligned} U &= mgR(1 + \cos \theta) + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \\ &= 2mgR \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \left(2R \cos \frac{\theta}{2}\right)} = \\ &= 2mgR \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{qQ}{16\pi\epsilon_0 R^2 mg} \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) = \\ &= 2mgR \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{f}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$



При записи данного выражения учтено, что расстояние между зарядами $|AB|$ равно $r = 2R \cos \frac{\theta}{2}$. Изменение потенциальной энергии при смещении шарика из верхнего положения описывается формулой:

$$\Delta U = 2mgR \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{f}{\cos \frac{\theta}{2}} - 1 - f \right). \quad (2)$$

1.2 Формулы для моментов сил можно вычислить как производные от соответствующей потенциальной энергии

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Не сложно выразить эти моменты непосредственно с помощью приведенного рисунка. Плечо силы тяжести $m\vec{g}$ есть длина отрезка $|CB| = R \sin \theta$, поэтому ее момент равен

$$M_{mg} = mgR \sin \theta. \quad (4)$$

Кулоновская сила взаимодействия между зарядами равна

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \left(2R \cos \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{qQ}{16\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = mg \frac{f}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (5)$$

Плечо этой силы – отрезок $|OD| = R \sin \frac{\theta}{2}$,

Теоретический тур. Решения задач.



Поэтому момент кулоновской силы определяется формулой

$$M_e = -mgR \frac{f \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (6)$$

1.3 График функции (4) очевиден – это участок синусоиды.

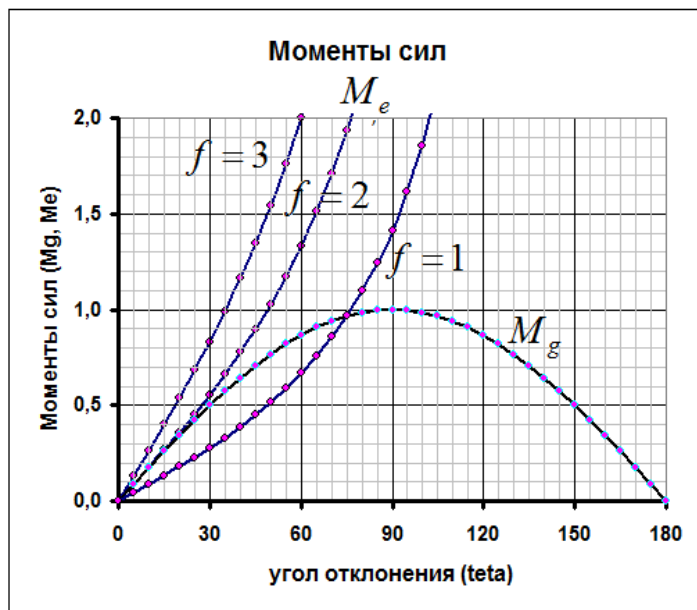
Для построения схематического графика функции (6) следует заметить, что эта функция в рассматриваемом диапазоне является возрастающей (возрастает и модуль кулоновской силы, и ее плечо).

Далее необходимо сравнить поведение этих функций вблизи нуля. Используя приближенные формулы для тригонометрических функций, получим приближенные формулы для моментов сил:

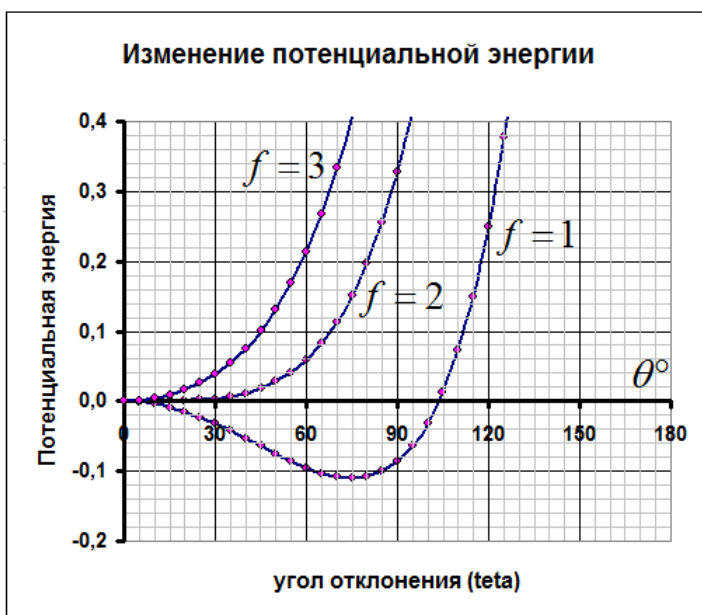
$$M_g = mgR \sin \theta \approx mgR \cdot \theta. \quad (7)$$

$$|M_e| = mgR \frac{f \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \approx mgRf \cdot \frac{\theta}{2}. \quad (8)$$

Из этих выражений следует, что при $f < 2$ момент силы тяжести возрастает быстрее, поэтому в этом случае графики рассматриваемых функций имеют точку пересечения (кроме точки $\theta = 0$). При $f = 2$ графики касаются друг друга вблизи нуля. Наконец, при $f > 2$ момент кулоновской силы растет быстрее момента силы тяжести.



1.4 Разность модулей моментов сил есть производная (взятая с противоположным знаком) от потенциальной энергии. Следовательно, при $f < 2$ зависимость потенциальной энергии от угла отклонения $\Delta U(\theta)$ имеет точку максимума (при $\theta = 0$) затем убывает, достигает минимального значения (в точке пересечения рассмотренных выше графиков), а затем начинает возрастать. При $f > 2$ зависимость $\Delta U(\theta)$ имеет точку минимума при $\theta = 0$, а затем монотонно возрастает. Случай $f = 2$ является граничным. Требуемые графики показаны на следующем рисунке.



Теоретический тур. Решения задач.



1.5 Условие того, что в процессе движения шарик не будет отрываться от внутренней поверхности сферы, можно сформулировать так: сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны сферы всегда больше нуля. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы проекция кулоновской силы на радиальное направление была больше или равна проекции силы тяжести на это же направление, или

$$F \cos \frac{\theta}{2} > mg \cos \theta \Rightarrow mg \frac{f}{\cos \frac{\theta}{2}} \geq mg \cos \theta \Rightarrow f \geq \cos \theta \cos \frac{\theta}{2}. \quad (9)$$

Максимальное значение произведения косинусов равно 1, поэтому требуемое условие окончательно формулируется

$$f \geq 1. \quad (10)$$

Иными словами, если шарик не отрывается в верхней точке, то он не оторвется ни в какой иной точке. Отметим также, что при движении шарика сила реакции поверхности сферы будет только возрастать, поэтому шарик тем более не оторвется от сферы.

1.6 Из анализа графиков потенциальной энергии, или из формул для моментов сил вблизи верхней точки следует, что верхнее положение будет устойчивым

$$f \geq 2. \quad (10a)$$

Часть 2. Движение шарика при $f = 1$.

2.1 Из вида зависимости потенциальной энергии от угла отклонения при $f = 1$ следует, что шарик начнет скользить по поверхности сферы, пройдет по инерции положение равновесия и остановится в точке, в которой изменение его потенциальной энергии станет равным нулю. Значение угла $\theta_{\max}$ в крайнем положении может быть найдено как решение уравнения

$$\Delta U = 2mgR \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{f}{\cos \frac{\theta}{2}} - 1 - f \right) = 0. \quad (11)$$

Обозначим $\cos \frac{\theta_{\max}}{2} = z$, тогда для этой величины справедливо уравнение:

$$z^2 + \frac{f}{z} - 1 - f = 0 \Rightarrow z^3 - 2z + 1 = 0. \quad (12)$$

Это уравнение имеет один очевидный корень $z_1 = 1$, соответствующий верхнему положению шарика (начальное положение). Знание этого корня позволяет преобразовать уравнение (12) к виду:

$$z^3 - 2z + 1 = (z^3 - z) - (z - 1) = z(z^2 - 1) - (z - 1) = (z - 1)(z(z + 1) - 1) = 0. \quad (13)$$

Тогда помимо корня $z_1 = 1$, это уравнение имеет еще два корня (корни квадратного уравнения):

$$z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}. \quad (14)$$

Один из этих корней по модулю превышает 1, поэтому косинус не может быть при вещественных значениях угла. Тогда интересующий нас корень $z_2 = \frac{\sqrt{1+4}-1}{2} \approx 0,618$, которому соответствует максимальный угол отклонения

$$\theta_{\max} \approx 104^\circ. \quad (15)$$



2.2 В состоянии равновесия сумма моментов сил, действующих на шарик равна нулю, поэтому

$$mgR \sin \theta = mgR \frac{f \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (16)$$

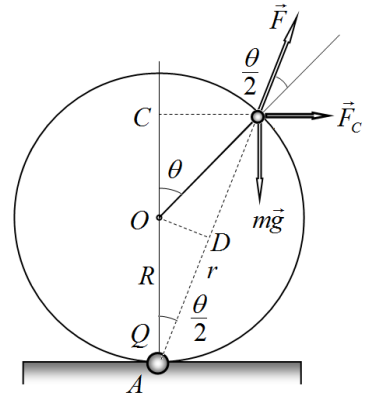
Из этого уравнения находим

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \cos^3 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{\theta} = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 75^\circ. \quad (17)$$

Как было показано ранее, в этой точке потенциальная энергия шарика минимальна, поэтому это положение равновесия будет устойчивым. Замечание: тот же результат можно получить, если производную от потенциальной энергии приравнять нулю.

2.3 Для описания движения шарика по горизонтальной окружности удобно перейти во вращающуюся систему отсчета, в которой шарик покоится. В этой системе необходимо добавить центробежную силу инерции $\vec{F}_C$, действующую на шарик. Эта сила зависит от скорости вращательного движения, поэтому может принимать любые положительные значения. Момент этой силы направлен так же, как и момент силы тяжести. Поэтому равновесие возможно только в той области, где модуль момента кулоновской силы больше модуля момента силы тяжести, т.е. при

$$\bar{\theta} < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$



Часть 3. Движение шарика при $f = 2$

Значение параметра $f = 2$ является критическим (точка бифуркации). Как было показано ранее (см. формулы (7)-(8)), при этом значении момент возвращающих сил в линейном приближении обращается в нуль. Однако, и в этом случае верхняя точка является точкой устойчивого равновесия, т.к. потенциальная кривая имеет точку минимума. Поэтому разложение моментов сил следует проводить до следующего порядка малости по углу отклонения θ . Так как моменты сил описываются нечетными функциями, то следующим порядком будет третий, т.е. Суммарный момент силы, действующий на шарик, можно представить в виде

$$M = M_g - M_e = mgR \sin \theta - 2mgR \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = -mgR \left(2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} - \sin \theta \right) = -CmgR \cdot \theta^3, \quad (18)$$

Где C - некоторый безразмерный коэффициент.

Тогда уравнение движения шарика вблизи верхней точки:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -CmgR \theta^3 \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -C \frac{g}{R} \theta^3 \quad (19)$$

Теоретический тур. Решения задач.



Является нелинейным уравнением, описывающим негармонические колебания. Так по условию задачи требуется определить только вид зависимости периода колебаний от их амплитуды, то нет необходимости искать точное решение уравнения (19). Для этого преобразуем уравнение к «безразмерному» виду. Введем переменную

$$\eta = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad (20)$$

Отношение угла отклонения к его амплитудному (максимальному) значению. Также введем собственную единицу измерения времени t_0 , значение которой определим позднее. Время, измеренное в единицах t_0 , связано со временем в секундах соотношением

$$\tau = \frac{t}{t_0}. \quad (21)$$

Перепишем теперь уравнение (19) во введенных нами собственных единицах ($\theta = \eta\theta_0$, $t = \tau t_0$):

$$\frac{\theta_0}{t_0^2} \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -C \frac{g}{R} \theta_0^3 \cdot \eta^3. \quad (22)$$

А теперь зададим введенную единицу времени таким образом, чтобы все коэффициенты в этом уравнении сократились, т.е.

$$\frac{\theta_0}{t_0^2} = C \frac{g}{R} \theta_0^3 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{\theta_0} \sqrt{C \frac{R}{g}}. \quad (23)$$

При таком определении единицы времени уравнение (22)

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\eta^3. \quad (24)$$

не содержит параметров, кроме того, переменная η изменяется в пределах от -1 до +1. Поэтому период колебаний в единицах t_0 является некоторым числом (ни от чего не зависящим). Переходя к обычным единицам времени, заключаем, что период колебаний пропорционален величине t_0 , поэтому формулу для периода можно представить в виде

$$T = \frac{C_0}{\theta_0} \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (25)$$

Примечания к решению Части 3.

1. При необходимости можно провести и точное разложение моментов сил до третьего порядка:

$$\begin{aligned} |M_e| &= mgR \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = mgR \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \approx 2mgR \sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \approx \\ &\approx 2mgR \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 \right) \left(1 + \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \approx 2mgR \left(\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 \right) = 2mgR \left(\frac{\theta}{2} + \frac{5}{6} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 \right) = \\ &\approx mgR \left(\theta + \frac{5}{24} \theta^3 \right); \\ M_g &= mgR \sin \theta \approx mgR \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right). \end{aligned}$$

Теоретический тур. Решения задач.



2. Альтернативный способ решения данной задачи может основываться на законе сохранения механической энергии. В этом случае следует провести разложение формулы для потенциальной энергии с точность до 4 порядка по малому углу отклонения θ .

$$\Delta U = 2mgR \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2}{\cos \frac{\theta}{2}} - 3 \right) \approx \frac{C}{4} mgR \theta^4.$$

Здесь C - та же константа, что и в формуле (18). Тогда из закона сохранения энергии

$$\frac{mR^2}{2} \omega^2 + \frac{C}{4} mgR \theta^4 = \frac{C}{4} mgR \theta_0^4$$

Выразим угловую скорость движения шарика

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{2} \frac{g}{R} (\theta_0^4 - \theta^4)}$$

И представим период колебаний в виде интеграла

$$T = 2 \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\omega} = 2 \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{C}{2} \frac{g}{R} (\theta_0^4 - \theta^4)}}$$

Проведем замену переменных в подынтегральном выражении $\eta = \frac{\theta}{\theta_0}$, в результате чего получим

$$T = \frac{2}{\theta_0} \sqrt{\frac{2}{C} \frac{R}{g}} \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^4)}}.$$

В этом выражении интеграл является некоторым числом, поэтому период колебаний определяется формулой (25).

Часть 4. Движение шарика при $f = 3$.

4.1 При значении $f > 2$ колебания шарика вблизи верхней точки являются гармоническим, так суммарный момент сил, действующий на шарик, при малых углах отклонения пропорционален этому углу. Воспользуемся формулами (7)-(8) и запишем уравнение движения:

$$mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR \left(\frac{f}{2} - 1 \right) \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{2R} \theta, \quad (26)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}. \quad (27)$$

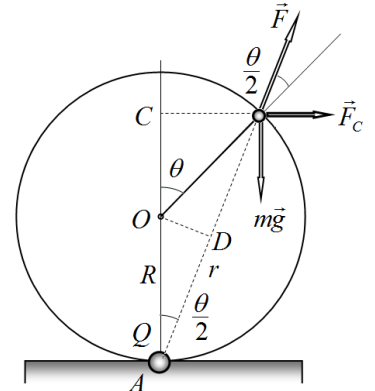
4.2 Запишем в явном виде условия равновесия шарика во вращающейся неинерциальной системе отсчета. Момент центробежной силы инерции в этой системе равен

$$M_C = \frac{mv_1^2}{R \sin \theta} R \cos \theta \approx \frac{mv_1^2}{\theta}. \quad (28)$$

Тогда условие равенства моментов сил принимает вид

$$|M_e| - M_g = M_C \Rightarrow \frac{3}{2} mgR \theta - mgR \cdot \theta = \frac{mv_1^2}{\theta}. \quad (29)$$

Из этого уравнения следует, что линейная скорость шарика и угол его отклонения связаны соотношением





$$v_1 = \theta \sqrt{\frac{gR}{2}}. \quad (30)$$

Отметим, что период обращения шарика по круговой орбите

$$T = \frac{2\pi R\theta}{v_1} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}},$$

во-первых, не зависит от угла отклонения, во-вторых, совпадает с периодом малых колебаний.

Наконец, необходимо выразить максимальный угол отклонения чрез начальную скорость шарика. Для этого удобно воспользоваться законом сохранения энергии. Сначала получим формулу для изменения потенциальной энергии шарика при малых углах отклонения, для чего необходимо провести разложение потенциальной функции до второго порядка по углу θ :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 2mgR \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{f}{\cos \frac{\theta}{2}} - 1 - f \right) = 2mgR \left(\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \right)^2 + \frac{f}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2} - 1 - f \right) = \\ &= 2mgR \left(\left(1 - 2 \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \right) + f \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \right) - 1 - f \right) = \frac{1}{2} mgR \left(\frac{f}{2} - 1 \right) \theta^2 = \frac{3}{4} mgR \theta^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнение закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{4} mgR \theta^2 \quad (32)$$

Дает следующую связь между искомыми величинами

$$\theta^2 = \frac{2}{3} \frac{v_0^2}{gR}. \quad (33)$$

Подставляя полученное значение в формулу (30), окончательно получим значение скорости движения по круговой траектории

$$v_1 = \theta \sqrt{\frac{gR}{2}} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}. \quad (34)$$